II. Réciproque et contraposée du théorème du théorème de Pythagore :

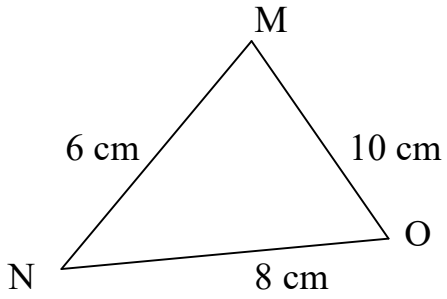
(Pour comprendre la différence entre la contraposée d'une propriété et la réciproque d'une propriété, vous pouvez lire le document correspondant.)

* La réciproque du théorème de Pythagore permet de montrer qu'un triangle est rectangle si on connaît la longueur de ses 3 côtés et que la formule du théorème est vraie.

* La contraposée du théorème de Pythagore permet de montrer qu'un triangle n'est pas rectangle si on connaît la longueur de ses 3 côtés et que la formule du théorème est fausse.

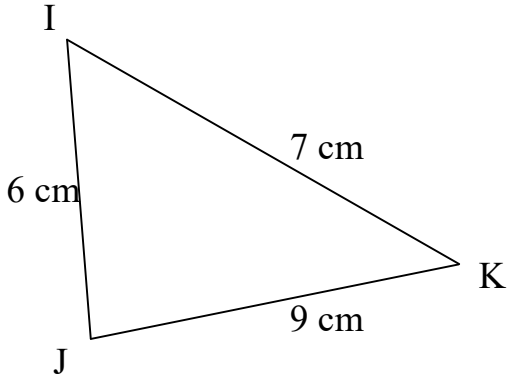
Exemples d'utilisation :

Ex 1 : On considère un triangle MNO tel que MN = 6 cm, OM = 10 cm et NO = 8 cm. Ce triangle est-il rectangle ?



On sait que dans le triangle MNO le plus grand côté est [OM].
On a : $MO^2 = 10^2 = 100$
Et : $MN^2 + NO^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
Donc $MO^2 = MN^2 + NO^2$
Donc par la réciproque du théorème de Pythagore, ***le triangle MNO est rectangle en N.***

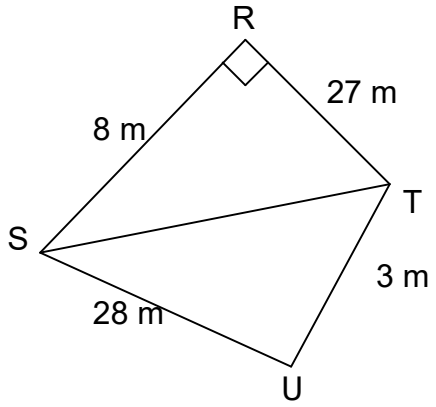
Ex 2 : On considère un triangle IJK tel que IJ = 6 cm, IK = 7 cm et JK = 9 cm. Ce triangle est-il rectangle ?



On sait que dans le triangle IJK le plus grand côté est [JK].
On a : $JK^2 = 7^2 = 49$
Et : $JI^2 + IK^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$
Donc $JK^2 \neq JI^2 + IK^2$
Donc par la contraposée du théorème de Pythagore, ***<u>le triangle IJK n'est pas rectangle.</u>***

(On fait bien la différence de rédaction quand on utilise la réciproque et la contraposée : on doit faire deux calculs séparés et ne pas partir d'une égalité comme lorsqu'on utilise le théorème de Pythagore.)

Ex3 :



Sur la figure ci-dessus, le triangle RST est rectangle en R et on donne :
RS = 8 m, RT = 27 m, SU = 28 m et UT = 3 m
Le triangle STU est-il rectangle ?

(Dans de nombreux exercices il faut utiliser théorème de Pythagore et contraposée ou réciproque dans les différentes questions.)

Pour déterminer si le triangle STU est rectangle il nous faut d'abord trouver la longueur ST en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle SRT.

- <u>On cherche ST :</u>

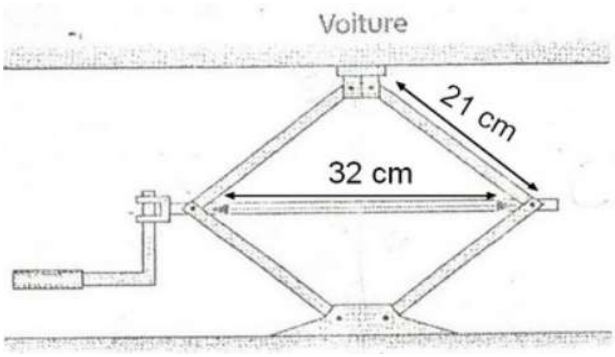
Le triangle RST est rectangle en R, donc par le théorème de Pythagore on a :
$ST^2 = SR^2 + RT^2$
$ST^2 = 8^2 + 27^2$
$ST^2 = 64 + 729$
$ST^2 = 793$
D'où $ST = \sqrt{793} \approx 28{,}2$ (cm)

- <u>On détermine si le triangle STU est rectangle :</u>

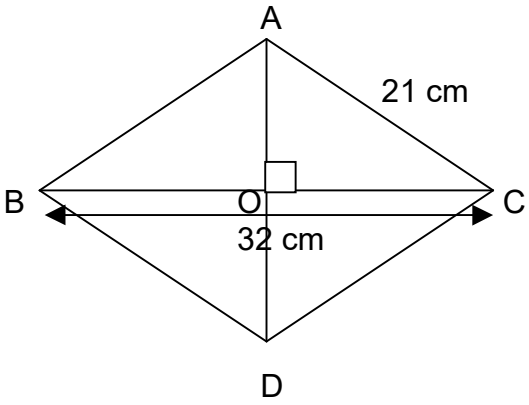
On sait que dans le triangle STU le plus grand côté est ST.
On a : $ST^2 = 793$ ***(Ne pas calculer $ST^2 = 28{,}8^2 = 795{,}24$! ! !)***
Et : $SU^2 + UT^2 = 28^2 + 3^2 = 784 + 9 = 793$
Donc $ST^2 = SU^2 + UT^2$

Donc par la réciproque du théorème de Pythagore ***<u>le triangle STU est rectangle en U</u>***.

Ex4 : Le cric d'une voiture a la forme d'un losange de 21 cm de côté comme représenté ci-dessous. A quelle hauteur soulève-t-il la voiture lorsque la diagonale horizontale mesure 32 cm ?



Le cric a la forme d'un losange ABCD comme ci-dessous :



Comme ABCD est un losange, ses diagonales [AD] et [BC] sont perpendiculaires et ont le même milieu.
Donc OC = OB = 16 cm et AO = OD.

On sait donc que le triangle AOC est un triangle rectangle en O, donc par le théorème de Pythagore on a :
$AC^2 = AO^2 + OC^2$
$21^2 = AO^2 + 16^2$
$441 = AO^2 + 256$
d'où $AO^2 = 441 - 256 = 185$
d'où $AO = \sqrt{185} \approx 13{,}6$ (cm)

On a alors :$AD = 2 \times AO \approx 2 \times 13{,}6 \approx 27{,}2$ (cm)
La voiture est donc levée d'environ ***<u>27,2 cm</u>***.