

Chapitre 1 :

Nombres relatifs, fractions, priorités opératoires

I. Rappels sur les relatifs :

1) Somme de deux relatifs :

1° cas : si les deux nombres ont le même signe

$(-4) + (-7) = (-11)$ Les deux nombres sont négatifs donc on garde le signe - pour le résultat : le résultat est négatif
Dans ce cas on ajoute les deux distances à zéro (ou parties numériques) : $4 + 7 = 11$

$(+5) + (+9) = (+14)$ Les deux nombres sont positifs donc le résultat est positif
Et dans ce cas on ajoute les deux distances à zéro :
 $5 + 9 = 14$

2° cas : si les deux nombres ont des signes différents

$(-7) + (+9) = (+2)$ Le résultat a le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro. Ici $9 > 7$ donc le résultat a le signe de +9
Dans ce cas, on effectue la soustraction entre la plus grande distance à zéro et la plus petite :
 $9 - 7 = 2$

$(+3) + (-8) = (-5)$ Le résultat aura le signe de -8 car $8 > 3$
On calcule alors : $8 - 3 = 5$

$(+11) + (-8) = (+3)$ Le résultat aura le signe de +11 car $11 > 8$
On calcule alors $11 - 8 = 3$

2) Sommes de plusieurs relatifs :

Lorsqu'on doit calculer la somme de plusieurs relatifs, on peut utiliser, ensemble ou non, ces 3 méthodes :

- Barrer les nombres opposés car leur somme est nulle. Par exemple :

$$(-4) + (+4) = 0$$

- Regrouper les nombres astucieusement pour faciliter les calculs

- Regrouper ensemble les nombres ayant le même signe

Exemples :

$$\begin{aligned} A &= (-17) + (+9) + (+5) + (-11) + (+12) \\ &= (+9) + (-11) \\ &= \underline{(-2)} \end{aligned}$$

Dans l'exemple A, on a barré (-17), (+5) et (+12) car $(+5) + (+12) = (+17)$ et (-17) et (+17) sont opposés. Il ne reste alors que deux nombres à ajouter...

$$\begin{aligned} B &= (-6,28) + (+6,3) + (-14) + (+4,28) + (+3,7) \\ &= (-6,28) + (+4,28) + (+6,3) + (+3,7) + (-14) \\ &= \quad (-2) \quad + \quad (+10) \quad + (-14) \\ &= \quad (-2) \quad + \quad (-14) \quad + \quad (+10) \\ &= \quad \quad (-16) \quad + \quad (+10) \\ &= \underline{(-6)} \end{aligned}$$

Dans l'exemple B, on a regroupé (-6,28) et (+4,28) car leur somme nous donne un nombre entier (plus facile à utiliser pour le calcul.) Leurs parties décimales s'annulent car ils ont des signes contraires et on doit soustraire leurs distances à zéro dans ce cas.

On a regroupé (+6,3) et (+3,7) car leur somme nous donne aussi un nombre entier.

Ensuite on regroupe (-2) et (-14) : regrouper les nombres de même signe est utile pour le calcul mental car il est plus facile d'additionner mentalement que de soustraire.

La suite du calcul se fait simplement...

3) Différences avec des relatifs :

Règle :

Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.

Exemples :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (-6) - (-7) \\ &= (-6) + (+7) \quad \text{Au lieu de retirer } -7 \text{ on ajoute son opposé } +7 \\ &= \underline{(+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & (-14) - (+16) \\ &= (-14) + (-16) \quad \text{Au lieu de retirer } +16 \text{ on ajoute son opposé } -16 \\ &= \underline{(-30)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & (+15) - (+2) \\ &= (+15) + (-2) \quad \text{Au lieu de retirer } -2 \text{ on ajoute son opposé } +2 \\ &= \underline{(+13)} \end{aligned}$$

4) Suites d'additions et de soustractions :

Dans une suite d'additions et de soustractions de relatifs, on doit d'abord transformer les soustractions en additions avant de faire les calculs.

Exemples :

$$\begin{aligned} A &= (-5) - (-3) + (+9) - (+21) + (-1) \\ &= (-5) + (+3) + (+9) + (-21) + (-1) \\ &= (+3) + (+9) + (-5) + (-21) + (-1) \\ &= (+12) + (-27) \\ &= \underline{(-15)} \end{aligned}$$

Dans cet exemple, on a d'abord transformé les 2 soustractions de l'expression (en rouge) par des additions.

Ensuite on a poursuivi le calcul en regroupant les positifs ensemble et les négatifs ensemble.

$$\begin{aligned} B &= (+6,82) + (-8,8) - (-24) - (+4,82) - (+1,2) \\ &= (+6,82) + (-8,8) + (+24) + (-4,82) + (-1,2) \\ &= (+6,82) + (-4,82) + (-8,8) + (-1,2) + (+24) \\ &= (+2) + (-10) + (+24) \\ &= (+2) + (+24) + (-10) \\ &= (+26) + (-10) \\ &= \underline{(+16)} \end{aligned}$$

Dans cet exemple, on a transformé les trois soustractions en additions. Puis on a regroupé astucieusement certains termes pour obtenir des nombres entiers.

On a terminé ensuite le calcul en regroupant les termes de même signe.

5) Ecritures simplifiées :

On peut simplifier l'écriture d'une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs en respectant ces deux règles :

- On enlève les parenthèses autour des relatifs et les signes « + » des additions (pas des relatifs !)
- Si le premier terme de l'expression est positif on peut retirer son signe « + »

Exemple :

$$\begin{aligned} &(+5) + (+8) - (+3) - (-2) + (-1) \\ &= (+5) + (+8) + (-3) + (+2) + (-1) \\ &= 5 + 8 - 3 + 2 - 1 \end{aligned}$$

Remarques :

* Pour calculer une somme en écriture simplifiée, il suffit de se rappeler qu'entre chaque nombre (pris avec leurs signes !) il y a une addition.

Par exemple :

$$9 - 7 + 3 - 4 \text{ doit se comprendre comme } (+9) + (-7) + (+3) + (-4)$$

Ainsi, on a :

$$- 5 - 4 = - 9 \quad (\text{Car } (-5) + (-4) = (-9))$$

$$- 18 + 20 = 2 \quad (\text{Car } (-18) + (+20) = (+2))$$

* Pour calculer une somme en écriture simplifiée, on utilise les mêmes techniques que pour les sommes en écriture non simplifiées : on peut barrer des opposés, regrouper astucieusement et/ou regrouper les positifs ensemble et les négatifs ensemble.

Exemple :

$$\begin{aligned} A &= - 4,2 + 8,98 - \cancel{173} + 1,2 + 2,02 + \cancel{173} - 21 \\ &= - 4,2 + 8,98 + 1,2 + 2,02 - 21 \\ &= - 4,2 + 1,2 + 8,98 + 2,02 - 21 \\ &= \quad - 3 \quad + 11 \quad - 21 \\ &= 11 - 3 - 21 \\ &= 11 - 24 \\ &= \underline{- 13} \end{aligned}$$

Dans l'expression A on a d'abord barré $- 173$ et $+ 173$ qui sont opposés.

On a regroupé astucieusement $- 4,2 + 1,2$ car leur somme est $- 3$, nombre entier.

On a regroupé aussi $+ 8,98$ et $+ 2,02$ car leur somme est aussi un nombre entier : $+ 11$

On termine le calcul en regroupant enfin les deux négatifs ensemble.

6) Produit de deux nombres relatifs :

Règle :

Le produit de deux nombres relatifs est :

- positif si les deux nombres ont le même signe.
- négatif si les deux nombres ont des signes contraires.

Autrement dit on a :

$$\begin{aligned} (+ \dots) \times (+ \dots) &= + \dots \\ (- \dots) \times (- \dots) &= + \dots \\ (+ \dots) \times (- \dots) &= - \dots \\ (- \dots) \times (+ \dots) &= - \dots \end{aligned}$$

Exemples :

$$\text{a) } (- 5) \times (+ 4) = - 20$$

$$\text{b) } (- 6,2) \times (- 3) = 18,6$$

7) Produit de plusieurs nombres relatifs :

Règle :

Le produit de plusieurs nombres relatifs est :

- positif si le nombre de facteurs négatifs est pair.
- négatif si le nombre de facteurs négatifs est impair.

Exemples :

$$A = (-4) \times (+6) \times (-17) \times (+5) \times (-2) \times (-31)$$

est positif car il y a 4 facteurs négatifs dans le produit et 4 est pair.

$$B = (+9) \times (-5) \times (+11) \times (-3) \times (+2) \times (-4)$$

est négatif car il y a 3 facteurs négatifs dans le produit et 3 est impair.

On explique la règle du produit de deux relatifs ainsi :

On sait déjà que le produit de deux positifs est forcément positif...

Ecrivons une partie de la table de (+3) :

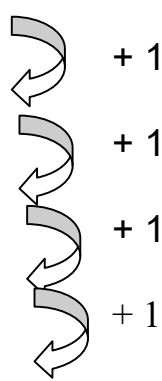
$$\begin{array}{l} (+2) \times (+3) = (+6) \\ (+1) \times (+3) = (+3) \\ (+0) \times (+3) = 0 \end{array} \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{l} -3 \\ -3 \\ -3 \end{array}$$

Dans cette table de (+3) on voit qu'on retire 3 à chaque fois qu'on diminue le premier nombre. Donc en poursuivant ainsi :

$$\begin{array}{l} (+2) \times (+3) = (+6) \\ (+1) \times (+3) = (+3) \\ (+0) \times (+3) = 0 \\ (-1) \times (+3) = (-3) \end{array} \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{l} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{array}$$

Et on voit alors que $(-1) \times (+3)$ est négatif, donc le produit d'un négatif par un positif est négatif.

En raisonnant de la même façon en utilisant la table de (-1) maintenant et en le multipliant d'abord par (+3) puis (+2), etc. on obtient ceci :

$$\begin{array}{rcl}
 (-1) \times (+3) & = & (-3) \\
 (-1) \times (+2) & = & (-2) \\
 (-1) \times (+1) & = & (-1) \\
 (-1) \times (0) & = & 0 \\
 (-1) \times (-1) & = & (+1)
 \end{array}$$


Et on constate que $(-1) \times (-1)$ est positif, donc le produit d'un négatif par un négatif est positif.

Pour la règle du produit de plusieurs nombres relatifs, il suffit de remarquer que si on regroupe les négatifs deux par deux, on obtiendra chaque fois des positifs.

Des positifs multipliés entre eux donneront des positifs.

Si le nombre de négatifs est impair, il restera un négatif tout seul une fois qu'on les aura regroupés deux par deux. Le produit reviendra à multiplier un négatif par un positif et sera donc négatif.

Exemples :

Calculer astucieusement ces sommes :

$$\begin{aligned}
 A &= (-125) \times (+48,734\,5) \times (-8) \\
 &= 125 \times 48,734\,5 \times 8 \quad \text{Le produit est positif car il y a deux négatifs} \\
 &= 125 \times 8 \times 48,734\,5 \quad \text{On regroupe 125 et 8} \\
 &= 1\,000 \times 48,734\,5 \\
 &= \underline{48\,734,5}
 \end{aligned}$$

Pour ce genre d'exercices il est bon de connaître ces 3 produits :

$$\begin{aligned}
 2 \times 5 &= 10 \\
 4 \times 25 &= 100 \\
 8 \times 125 &= 1000
 \end{aligned}$$

A partir de ces 3 produits on doit être capables de calculer ce genre de produits :

$$\begin{aligned}
 200 \times 0,5 &= 10 \\
 \text{cela ressemble à } 2 \times 5 &\quad \text{qu'on connaît} \\
 \text{mais on a 200 et pas 2, donc il faudra déplacer la virgule de 2 rangs vers} \\
 &\text{la droite dans le résultat initial 10.} \\
 \text{Et on a pas 5 mais 0,5 donc il faudra déplacer la virgule de 1 rang vers la} \\
 &\text{gauche dans le résultat initial 10.}
 \end{aligned}$$

On déplace la virgule de 2 rangs à droite et de 1 rang vers la gauche dans 10, ce qui nous donne bien 100

$$\begin{aligned} &= (+ 1,25) \times (- 40) \times (- 32,17) \times (+ 0,8) \times (- 0,25) \\ &= - 1,25 \times 40 \times 32,17 \times 0,8 \times 0,25 \quad \text{Le produit est négatif car il y a 3} \\ &\quad \text{facteurs négatifs} \\ &= - 1,25 \times 0,8 \times 40 \times 0,25 \times 32,17 \quad \text{On regroupe astucieusement} \\ &= - \quad 0,1 \quad \times \quad 10 \quad \times 32,17 \\ &= \quad \underline{- 32,17} \end{aligned}$$

8) Quotients avec des nombres relatifs :

La règle des signes pour les quotients de relatifs (résultats d'une division) est la même que pour les produits. Autrement dit :

$$\begin{aligned} (+ \dots) : (+ \dots) &= + \dots \\ (+ \dots) : (- \dots) &= - \dots \\ (- \dots) : (+ \dots) &= - \dots \\ (- \dots) : (- \dots) &= + \dots \end{aligned}$$

Exemples :

$$- 18 : (+ 2) = - 9$$

$$- 35 : (- 5) = 7$$

$$40 : (- 8) = - 5$$

$$\frac{-12}{-3} = 4$$

$$\frac{42}{-7} = - 6$$

$$\frac{-9}{3} = - 3$$

Remarque :

Quels que soient les nombres a et b (avec $b \neq 0$) on a :

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = - \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Généralement si une « fraction » est négative, on met le signe moins devant le numérateur ou devant le trait de fraction plutôt que devant le dénominateur.

9) Priorités opératoires :

Règle de priorité 1 :

Pour calculer une expression ne comportant aucune opération à l'intérieur de parenthèses, on doit effectuer les multiplications et les divisions avant d'effectuer les additions et les soustractions.

Exemples :

$$\begin{aligned} \text{A} &= -4 - 3 \times (-5) \\ &= -4 - (-15) && \text{si on effectue le produit } 3 \times (-5) \text{ en gardant la soustraction} \\ (\text{ou } &= -4 + 15 && \text{si on effectue le produit } -3 \times (-5)) \\ &= \underline{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B} &= -6 \times 5 - 12 : (-4) \\ &= -30 + 3 && \text{car } -12 : (-4) = +3 \\ &= \underline{-27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C} &= \frac{-5 \times 4 + 7}{-2 - (-8 + 3)} \\ &= \frac{-20 + 7}{-2 - (-5)} \\ &= \frac{-13}{-2 + 5} \\ &= \frac{-13}{3} \end{aligned}$$